Física Cuántica II (3er curso del Grado en Física). Prueba Personal. Septiembre de 2013

Es necesario superar el 40 % de la nota máxima de cada parte para compensar.
Cuestiones: Hasta 1,5 puntos cada una (total cuestiones: 3 puntos). **Conteste breve y razonadamente**, ajustándose a la pregunta y explicando su respuesta.
Problemas: Hasta 3,5 puntos cada uno (total problemas: 7 puntos). Debe resolverlos, no sólo decir cómo se se podrían resolver ni poner la solución, sino que **hay que resolverlos realmente, explicando los pasos y discutiendo los resultados**. Defina **todas** las variables que use y **explique** la notación y las fórmulas que utilice.
No haga números hasta haber obtenido una expresión algebraica (estime entonces en órdenes de magnitud).
No se permite ni calculadora ni material auxiliar alguno. **Tiempo:** dos horas.

CUESTIONES

(solamente deben responderlas los alumnos que no hayan realizado la evaluación continua)

1.- Queremos obtener por un método variacional la energía del nivel energético más bajo con momento angular l de un potencial radial de la forma $V(r) = kr$. ¿Cuál podría ser una función de prueba adecuada? Exprésela en función de armónicos esféricos y de potencias de r.

2.- Es sabido que las autoenergías y autofunciones de un pozo cuadrado unidimensional infinito con paredes en $x = 0$ y L son $E_n = n^2\pi^2\hbar^2/(2mL^2)$ y $\psi_n(x) = \sqrt{2/L}\sin(n\pi x/L)$. ¿Cuáles son las autoenergías y autofunciones para estados con $l = 0$ de un pozo infinito esférico de radio a (es decir, un pozo con potencial $V(r) = 0$ para $r < a$ y $V(r) = \infty$ para $r > a$)?

PROBLEMAS

1.- Una partícula de masa m está confinada a moverse en el plano XY, a lo largo de una circunferencia de radio a y sometida a un potencial de la forma $V(\theta) = A\sin\theta\cos\theta$, siendo θ el ángulo medido respecto al eje X. Considerando $V(\theta)$ como una perturbación, calcular las funciones de onda de los dos niveles más bajos a primer orden en teoría de perturbaciones, y sus energías a segundo orden.

2.- Describimos una partícula de espín 1 en la base estándar de autoestados de $\widehat{S}_z$, que denotamos como $\{|+\rangle, |-\rangle, |0\rangle\}$.
La partícula se encuentra en un estado estacionario bajo un hamiltoniano $\widehat{H} = -\varepsilon\hbar^{-2}\widehat{S}_z^2$, con $\varepsilon > 0$.
El estado de espín de la partícula para $t < 0$ es $\big(|+\rangle + |-\rangle\big)/\sqrt{2}$.
En el instante $t = 0$ empieza a actuar sobre la partícula una perturbación $\lambda\widehat{W}$, con $|\lambda| \ll 1$, tal que $\langle -|\widehat{W}|0\rangle = \langle 0|\widehat{W}|-\rangle = \varepsilon$, siendo nulos el resto de los elementos de matriz.
Obtenga la probabilidad de que en un instante $t > 0$ la partícula haya saltado al estado de espín $|0\rangle$:
a) Usando teoría de perturbaciones dependientes del tiempo a primer orden.
b) Exactamente. En consecuencia, juzge la bondad del resultado perturbativo.

Datos que podrían ser útiles: $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s, 1 eV $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ J $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
$m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, $R_\infty = 109737$ cm^{-1}, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, $N_A = 60{,}2 \times 10^{22}$, $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
$\mu_b = e\hbar/(2m_e) = 9{,}27 \times 10^{-24}$ J T^{-1}, $c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}, $a_o = 4\pi\epsilon_o\hbar^2/me^2 \simeq 0{,}52$ Å, $\lambda_C = h/(m_e c) = 0{,}024$ Å
$1/(4\pi\epsilon_o) = 9 \times 10^9$ m^3 kg s^{-2} C^{-2}

Integrales que podrían ser útiles:

$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/a}$ $\quad\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx = 1/(2a)$ $\quad\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4}\sqrt{\pi/a^3}$

$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}dx = 1/(2a^2)$ $\quad\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi/a^5}$ $\quad\int_0^\infty x^5e^{-ax^2}dx = 1/a^3$

$\int_0^\infty r^n e^{-ar}dr = n!/a^{n+1}$ $\quad\int_0^t \exp(-x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(t)$ $\quad\int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$

$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$ $\quad\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x)$

$\int x^2\cos^2 x\,dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\sin(2x)$

Operadores de momento angular $\quad\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$ $\quad\hat{L}_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$